最適投資決定について

―― 農家投資行動の動学化 ――

羽　渕　統次郎

On the optimal investment-decision

――Dynamics of farm investment and management decision――

Tōzirō HABUCHI

The theory of optimal control was developed by the well known Russian Mathematician *L. S. Pontryagin* and his co-workers in the late 1950's and published in 1962 of *The Mathematical Theory of Optimal Processes*.

The theory has a very wide field of applicability, including much of economic theory and management science. Economists have focused their attentions to the optimal investment decision, so far. The much results have been yielded, but these results were concerned with the tasks of macro-ecomomics.

I construct the farm model over time and formulate dynamic systems of the farm investment, consumption and production. Next I show how to manage the farm to maximize the objective function of many periods. That means optimal consumption-decision, optimal investment-decision, optimal production-decision.

Next I prove the global stability by means of the differential equations, and prove the existence of unique solution for this differential equation systems. Then I determine the time paths of investment, consumption and production, and refer to the example to lead to the concrete solutions.

1. 緒　　言

前論文「The Study of Investment Decision」において企業の投資行動を調べたのであるが，その場合各主体が生産要素を所有せず，すべての労働及び資本用役は雇用及び購入に依存する純粋な企業行動の投資活動であった．そこで今回は農家の経済行動に限定して，その投資―生産―消費の最適化行動と動学的経路について検討して見よう．まず農家といっても現存の農家には諸々の農家があり，企業的経営の農家もあれば兼業農家，専業農家，自給自足に近い農家もある．しかしながら，現資本主義下に支配的な1農家を想定してモデル構成を行ない，その経済活動を明らかにし，次いで動学的分析に入るのが最も分析を容易にするであろう．交換経済下における農家経済は一部農産物は自家消費され，他は販売されて非農業生産物の購入にあてられるが，非農業生産物の購入は農家にあっては2種類存在し，一つは自家家計部門消費物資の購入であり，他は農業生産手段の購入である．生産要素は土地，労働力，資本財について，それぞれ小作地を所有する場合と自作地だけの場合，自家労働力だけに依存する場合と雇用労働に依存する場合，賃貸資本の存在等の場合を考えて，農家経済モデルを構成しなけれ

ばならない．想定上の農家はかくの如く労働力，土地，資本財を所有して農業経営を営み，労働が不足する場合には雇用し，過剰な時は兼業に出て日雇い労働賃を稼得する農家であり，土地用役が不足する時には小作地を得て土地用役を購入する．資本財借入資本を所有する農家は非常に少なく，無視してもかまわない．さらに年度内消費，費消額を農業生産物販売収益から差引いた残額は資金量として貸付する．マイナスの場合は借入する．これら資本財用役，労働，土地用役市場は．完全競争を仮定するしたがって農家は非常に合理的に行動し，自家農業から得られる労働の限界評価よりも大なる非農業部門労働賃金が得られる場合は非農業部門へ日雇いに出て日雇い賃金を稼得するが，労働の限界評価は逓減的であるから賃金イコール労働の限界評価が成立する時，その非農業部門へのそれ以上の日雇い出稼ぎを止め，労働の限界評働が大なる時は外部から労働を雇用するものとする．土地用役市場が完全競争的であるとは一般地代イコール土地の限界生産力が成立していることを意味する．

2.　農家経済モデル構成

すでに説明したように農家は農業生産物を生産するを稼業とし，その生産要素がある労働力，資本財，土地から湧出する労働，資本用役，土地用役をもって農産物を生産する．この場合動学的定式化には2通り存在する．一つは各期の財を連続な財として取扱う方法であり，他は独立な財として取扱う方法である．本稿では連続な財として取扱うことにしよう．したがって農家の動学的生産函数をベクトル表示で表わすと

$$y_t' = e^{-d} f(a_t,\ b_t,\ x_t,\ t) \cdots\cdots(1)$$

e^{-d} は割引率

y_t'：t期自家農業生産物量ベクター

a_t：t期自家農業消費労働量ベクター

b_t：t期自家農業消費土地用役量ベクター

x_t：t期自家農業消費資本用役量ベクター

である．したがって，$t=0 \cdots\cdots T$ の計画期間の生産物合計は次の如きである．

$$\int_0^T y_t' = \int_0^T e^{-d} f(a_t,\ b_t,\ x_t,\ t)\,dt \cdots\cdots(2)$$

生産函数に関する仮定は次の如くである．

1. 各期生産函数は上記の三生産要素用役の他，時間によっても変化する．
2. 各期生産函数は連続微分可能であり，各要素用役量で微分した値は f_{at}，f_{bt}，f_{xt}，f_t と記し，それぞれ正である．しかもそれら各生産要素用役での二次微分値は負である．

$f''_{at} < 0$，$f''_{bt} < 0$，$f''_{xt} < 0$　このことは生産函数が各生産要素用役について逓減的であることを意味する．

次に農家の各期収支は均等していなければならない．農家の支払いが年度末に全部実施されると仮定すると次記の収支均等式が成立していなければならない．生産物価格を1にしても一般性を失わないから，

$$y_t' + P_{bs}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{as}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{Ba}^{(t)} B_a^{(t)} - P_c^{(t)} x_t - P_{aa}^{(t)} a_a^{(t)} - S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t \equiv 0 \cdots\cdots(3)$$

y_t'　：t期農産物販売額ベクター

y_t　：t期農家家計消費量ベクター

$B_s^{(t)}$：t期土地処分量ベクター

$a_s^{(t)}$：t 期家族の農外出稼労働時間ベクター

$a_a^{(t)}$：t 期農家雇用労働ベクター

$D^{(t)}$：t 期借入金ベクター

$S^{(t)}$：t 期預貯金ベクター

$B_a^{(t)}$：t 期土地購入量ベクター

x_t：t 期資本財購入量ベクター

$P_{B_s}^{(t)}$：t 期 $B_s^{(t)}$ の価格ベクター

$P_{a_s}^{'(t)}$：t 期 $a_s^{(t)}$ の価格ベクター

P_{B_a}：t 期 $B_a^{(t)}$ の価格ベクター

$P_x^{(t)}$：t 期 $x^{(t)}$ の価格ベクター

$P_{a_a}^{'(t)}$：t 期 $a_a^{(t)}$ の価格ベクター

$P_y^{(t)}$：t 期 y_t の価格ベクター

したがって各期収支の割引された計画期間の函数関係は次の如く表わされる．

$$\int_0^T e^{-dt}(y_t' + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x_t - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)} - S^{(t)} - P_y^{(t)} y)\,dt \equiv 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

次に預貯金と借入金残高は計画期間に次の如き関係が成立する．

$$M^{(t)} = \int_0^T \{S^{(t)}(1 + r_s^{(t)}) - D^{(t)}(1 + r_a^{(t)})\}\,dt + M^0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$M^{(t)}$：t 期預貯金残高ベクター

M^0　：0 期預貯金高ベクター

$r_s^{(t)}$　：t 期貸付利子ベクター

$r_a^{(t)}$　：t 期借入金利子ベクター

土地の所有量は次の如き関係が成立していなければならない．

$$B^t = \int_0^T (B_a^{(t)} - B_s^{(t)})\,dt + B^0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$B^{(t)}$：t 期土地所有量ベクター

$B_a^{(t)}$：t 期土地購入量ベクター

$B_s^{(t)}$：t 期土地販売量ベクター

B^0　：0 期土地所有量ベクター

さらに労働は農家において各期需給が均等している．

$$A^{(t)} + a_a^{(t)} - a_s^{(t)} - a^{(t)} \equiv 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$A^{(t)}$：t 期農家労働時間ベクター

$a^{(t)}$　：t 期農業労働時間ベクター

となる．これらの制約条件下における農家効用の計画期間内最大化をもって農家の目的とするが，農家の効用は農家家族員消費物量と農家資産量を家族員労働時間の函数として次の如き多数期間効用函数を得る．

$$V = \int_0^T U_t(y_t,\ M^t,\ B^t,\ (a^{(t)} + a_s^{(t)} - a_a^{(t)}))\,dt \quad \cdots\cdots(8)$$

さらに各期効用函数は次の仮定をおく．

1．効用函数の1次微分は次の如く表わす．

$U^{(t)}_{y_t}$，$U^{(t)}_{M_t}$，$U^{(t)}_{a_{t1}}$，$U^{(t)}_{a_s}$，$U^{(t)}_{a_a}$，それらのそれぞれの符号は $U^{(t)}_{y_t}>0$，$U^{(t)}_{M_t}>0\,(M_t>0)$，$U^{(t)}_{M_t}<0\,(M_t<0)$，$U^{(t)}_{a_t}<0$，$U^{(t)}_{a_s}<0$，$U^{(t)}_{a_a}>0$，さらに2次微分は $U^{t''}_{y_t}$，$U^{t''}_{M_t}$，$U^{(t)''}_{a_t}$，$U^{t''}_{a_s}$，$U^{t''}_{a_a}$，と表わし，符号はそれぞれ，<0，<0，<0，<0，>0，とする．多数期間の効用函数を定義する場合二通りの方法がある．1つは各期消費財を変数とする場合であり，$U(x_{12}\cdots\cdots\cdots x_{ji}\cdots\cdots\cdots x_{Tu})$ となり，x_{ji} は j 期 i 財の消費量の場合である．他の場合は他の生産函数，各期収支均等式の定式化においても物財の変数にした定式化が必要である．これに対し，各期家計消費額を変数とする場合は多数期間の生産函数は多数期間投資支出函数に置き変えられなければならない．この違いは前論文(注1)においても述べられた如く，投資そのものの定義をいかにするかの差ともなって表わされる．経常的支出をも投資という概念に含むならば今期収益力をゼロとすれば投資支出函数の導入は全計画期間の支出を表わすことに無理がある．したがってこの定式化の違いは計画期間の長さの大小にも関係して来るのであるが，経常的支出と長期投資の別の言葉で表わす場合もあるが，計画期間が短期の場合は生産函数で表わすのが，より有利な方法と言い得よう．

さて，補助函数でもって農家の効用最大化の条件を求めて見よう．(2)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)から目的函数を定めると，

$$
\begin{aligned}
&L\,(y_t,\ a^{(t)},\ a^{(t)}_s,\ a^{(t)}_a,\ S^{(t)},\ D^{(t)},\ x_t,\ B^{(t)}_s,\ B^{(t)}_a,\ \lambda_0=1,\ \lambda^{(t)}_1)\\
&=\lambda_0\int_0^T U\,(y_t,\ S^{(t)},\ D^{(t)},\ a^{(t)}+a^{(t)}_s-a^{(t)}_a,\ B^{(t)}_s,\ B^{(t)}_a)\,dt\\
&+\int_0^T \lambda^{(t)}_1 e^{-dt}\{f\,(a^{(t)},\ B^{(t)}_s,\ B^{(t)}_a,\ x_t)+P^{(t)}_{B_s}B^{(t)}_s+P^{(t)}_{a_s}a^{(t)}_s\\
&+D^{(t)}-P^{(t)}_{B_a}B^{(t)}_a-P^{(t)}_x x_t-P^{(t)}_{a_a}a^{(t)}_a-S^{(t)}-P^{(t)}_y y_1\}\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)
\end{aligned}
$$

各期資金需給均等式，各期土地所有需給均等式は方程式を簡単化のために，初期手持量を所与として固定し，消去されている．さて最大化のための条件は次の如きハミルトン函数を導入することによって解かれる．

$$
\begin{aligned}
H&=\lambda_0 U(y_t,\ S^{(t)},\ D^{(t)},\ a^{(t)}+a^{(t)}_s-a^{(t)}_a,\ B^{(t)}_s,\ B^{(t)}_a)+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}\\
&\quad\{f\,(a^{(t)},\ B^{(t)}_s,\ B^{(t)}_a,\ x_t)+P^{(t)}_{B_s}B^{(t)}_s+P^{(t)}_{a_s}a^{(t)}_s+D^{(t)}-P^{(t)}_{B_a}B^{(t)}_a\\
&\quad-P^{(t)}_x x_t-P^{(t)}_{a_a}a^{(t)}_a-S^{(t)}-P^{(t)}_y y_t\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)
\end{aligned}
$$

静学的な均衡解はハミルトン函数を各変数で1次微分することによって解かれる．

$$
\begin{aligned}
&\partial H/\partial y_t=U^{(t)}_{y_t}-\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}P^{(t)}_y\leqq 0, && \partial H/\partial y_t\cdot y_t=0\\
&\partial H/\partial a^{(t)}=U^{(t)}_a+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}f_{a_t}\leqq 0, && \partial H/\partial a^{(t)}\cdot a^{(t)}=0\\
&\partial H/\partial a^{(t)}_s=U^{(t)}_{a_s}+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}P^{(t)}_{a_s}\leqq 0, && \partial H/\partial a^{(t)}_e\cdot a^{(t)}_s=0\\
&\partial H/\partial a^{(t)}_a=U^{(t)}_{a_a}-\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}P^{(t)}_{a_a}\leqq 0, && \partial H/\partial a^{(t)}_a\cdot a^{(t)}_a=0\\
&\partial H/\partial S^{(t)}=U^{(t)}_{s(t)}-\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}\leqq 0, && \partial H/\partial S^{(t)}\cdot S^{(t)}=0\\
&\partial H/\partial D^{(t)}=U^{(t)}_{D(t)}+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}\leqq 0, && \partial H/\partial D^{(t)}\cdot D^{(t)}=0\\
&\partial H/\partial B^{(t)}_s=U^{(t)}_{B_s}+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}f_{B_s}+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}P^{(t)}_{B_s}\leqq 0, && \partial H/\partial B^{(t)}_s\cdot B^{(t)}_s=0\\
&\partial H/\partial B^{(t)}_a=U^{(t)}_{Ba(t)}+\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}f_{B_a(t)}-\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}P_{B_a}\leqq 0, && \partial H/\partial B^{(t)}_a\cdot B^{(t)}_a=0\\
&\partial H/\partial x_t=\lambda^{(t)}_1 e^{-dt}(f^{X_t}-P^{(t)}_{X(t)})\leqq 0, && \partial H/\partial x_t\cdot x_t=0
\end{aligned}
$$

$$\partial H/\partial\lambda_1^{(t)} = f(a^{(t)},\ B_s^{(t)},\ B_a^{(t)},\ x^{(t)}) + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)}$$
$$+ D^{(t)} - P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_c^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)} - S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t \equiv 0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

3.　変動経路の分析 (注2)

二階の条件は生産函数及び効用函数が最初の仮定によって限界代替率逓減的であり，生産函数に関しても限界変換率ないしは限界代替率逓減が仮定されているために必然的に満たされている．よって2次微分は調べる必要性を持たない．次に最適投資，最適生産，最適消費の動学的経路を調べるために，極大性原理を用いてオイラーの微分方程式を導びき，その経路及び動学的安定性を調べよう．まず資本財の最適化行動と経路の安定性を調べて見よう．最適化行動のための条件は

Ⅰ．maxH（…………）

即ちまず他の変数をⅠによって最大化しておき，資本財の最適化行動と経路の安定性を調べると(10)から

$$U_{B_s}^{(t)} + \lambda_1^{(t)} e^{-dt} f_{B_s} + \lambda_1^{(t)} e^{-dt} P_{B_s}^{(t)} \leqq 0, \qquad \partial H/\partial B_s^{(t)} \cdot B_s^{(t)} = 0$$
$$U_{B_{a(t)}}^{(t)} + \lambda_1^{(t)} f_{B_a}^{(t)} - \lambda_1^{(t)} P_{B_a}^{(t)} \leqq 0, \qquad \partial H/\partial B_a^{(t)} \cdot B_a^{(t)} = 0$$

の条件と

Ⅱ．$$-\partial H/\partial x_t = \frac{d\lambda_1^{(t)} e^{-dt}}{dt} \qquad \cdots\cdots(12)$$

Ⅲ．$$\partial H/\partial\lambda_1^{(t)} e^{-dt} = \dot{x} \qquad \left(\text{但し}\quad \dot{x}_t = \frac{dx_t}{dt}\right)$$

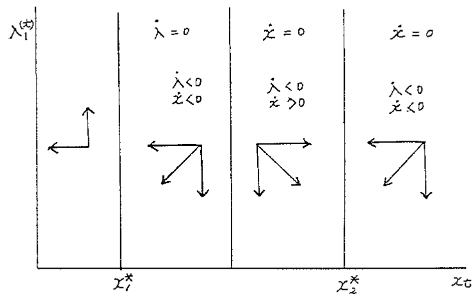
Ⅱの条件から次式が導びかれる．

$$\dot{\lambda}_1^t/\lambda_1^{(t)} = -f_{x_t} + P_{x_t} + d, \qquad \left(\text{但し}\quad \dot{\lambda}_1^t = \frac{d\lambda_1^{(t)}}{dt}\right) \qquad \cdots\cdots(13)$$

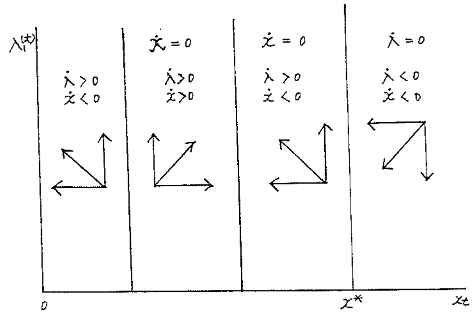
Ⅲの条件から次式が導びかれる．

$$\dot{x}_t = f(a^{(t)},\ B_s^{(t)},\ B_a^{(t)},\ x^t) + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)}$$
$$- P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)} - S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t \qquad \cdots\cdots(14)$$

第1図



第2図



第1図の場合はⅢの条件から導びかれる解の方がⅡの解よりも大なる場合であり，x_1^* 以外は不安定となる．この時 $\dot{x}=0$ で$\lambda_1^{(t)}\to$小に収斂する．第2図の場合はいずれも不安定であっ

て安定条件は満たされない．その他の場合もこの各図によって代表される．

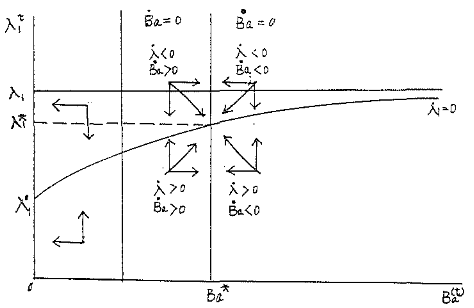
次に土地購入の場合を考えて見よう．Ⅱの条件から導びかれる式は

$$U_{B_a}^{(t)} e^{+dt} + \lambda_1^{(t)} f_{B_a}^{(t)} - \lambda_1^{(t)} P_{B_a} - \lambda_1^{(t)} d = \dot{\lambda}_1^{(t)} \quad \cdots\cdots(15)$$

Ⅲの条件から次式が導びかれる．

$$f\,(a^{(t)},\ B_s^{(t)},\ B_a^{(t)},\ x_t) + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)}$$
$$-P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_{X_t}^{(t)} x_t - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)} - S^{(t)} - P_y y_t = \dot{B}_a^{(t)} \quad \cdots\cdots(16)$$

第3図



すなわち，土地購入に対して最適な点 $(B_a^*,\ \lambda_1^*)$ が存在し，大域的に安定な点が存在している．この点は割引率 d の値がゼロに近ずくにつれて静学的な均衡点に収斂する．その場合 λ_1^* は λ_0^* の初期値である場合は $(B_a^*,\ \lambda_1^*)$ にいたるまでは土地を購入し，規模拡大して行くが，λ_1^* より大なる区域では規模を縮小して λ_1^* にいたらしめる如き最適化行動を遂行する．さらにひとたび動学的均衡点 $(B_a^*,\ \lambda_1^*)$ にいたるや，いかなる方向への外的変動が生じた場合にもすぐに収斂し，極めて安定的なる点である．(注3)

では土地売却に対してはどうであろうか．Ⅱの条件から次式が導びかれる．

$$-U_{B_s} + \lambda_1^{(t)} f_{B_s} + \lambda_1^{(t)} P_{B_s} + d\lambda_1^{(t)} = \dot{\lambda}_1^{(t)} \quad \cdots\cdots(17)$$

Ⅲの条件から次式が導びかれる．

$$\{f + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_a^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{ba}^{(t)} B_a^{(t)} - P_{X_t}^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)}$$
$$- S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t\} = \dot{B}_s^{(t)} \quad \cdots\cdots(18)$$

すなわちⅡの条件から導びかれる式は符号が変っただけで全く土地購入に対する最適化行動と同じで，Ⅲの条件も同様であるから，土地については大域的安定な最適点が存在することが証明された．

次に労働について調べて見よう．Ⅱの条件から導びかれる徴分方程式の如くである．

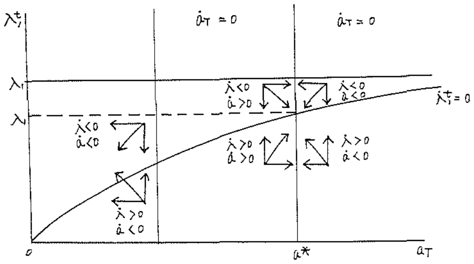
$$U_{a_t} e^{dt} + \lambda_1^{(t)} f_{a_t} - d\lambda_1^{(t)} - \lambda_1^{(t)} P_{a_a} = -\dot{\lambda}_1^t \quad \cdots\cdots(19)$$

Ⅲの条件から得られる徴分方程式は次式の如くである．

$$f + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)} - S_y^{(t)} y_t = \dot{a}_T \cdots(20)$$

この2式から導びかれる経路を図示すると，

第4図



すなわち労働の右図 $(a^*,\ \lambda_1^*)$ 点において大域的安定なる点が存在し，外的変動のあらゆる方向への乖離も一時的で，ただちに収斂し，均衡点 $(a^*,\ \lambda_1^*)$ を取りもどす．しかも割引率 d がゼロに近づくにつれて，この点 $(a^*,\ \lambda_1^*)$ は静学的均衡点に収斂する．以上農家の生産要素，資本財，土地，労働力についてその動学的均衡点の存在と収斂の方向，大域的安定性について調べたのであるが，ま

とめて見ると，まず資本財については二通りあり，第1図は $\lambda_1^{(t)} \to 0$ の方向に収斂して行く方向が考えられ，その時資本財の投下の最適行動は（x_2^*, 0）なる点に収斂するが，この時静学的均衡条件には全く別の点であり，たとえ割引率 d がゼロに近ずいても（x_2^*, 0）と静学的均衡条件は満たさない．この点（x_2^*, 0）が静学的均衡点となり得るのは $x_1^* = x_2^*$ が実現した時のみで，非常に可能性としては少ない．したがって収斂する方向は静学的均衡点よりも大なる点（x_2^*, 0）に収斂して行く．

第2図の如き静学的均衡点よりも少ない資本財でしか資本財の増加が不可能な時には安定的な点への収斂はなく各面において，それぞれ異なった方向に一方的に移動して行く．土地の最適化経路は大域的安定な点（B_a^*, λ_1^*）が存在し，この点は割引率 d がゼロに近ずくにつれて静学的な均衡点に収斂する．しかもこの点はあらゆる方向への乖離からも安定的である．労働についても同様に大域的安定な均衡点が存在し，この点は割引率がゼロに近ずくにつれて静学的な均衡点に収斂して行く．以上三要素の動学的最適化経路とその安定性について検討した．

さて次に農家の最適消費行動の決定とその時間的変動経路を調べて見よう．極大性原理から導びかれる条件は静学的均衡点の存在として上記の(11)が存在することの他に

（Ⅱ）　$$-\frac{\partial H}{\partial y_t} = \frac{\partial \lambda_1^t e^{-dt}}{dt}$$

Ⅲの条件

$$\partial H / \partial \lambda_1^{(t)} e^{-dt} = \dot{y}_t$$

Ⅱから導びかれる徴分方程式は次式の如くである．

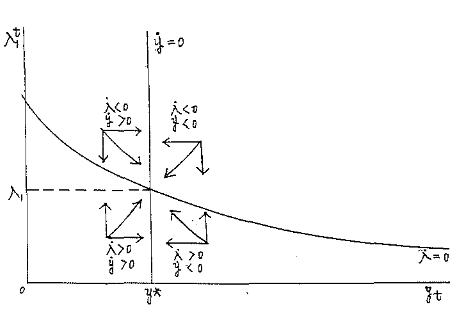
$$-U_{y(t)} e^{-dt} - \lambda_1^{(t)} f_{y_t} + \lambda_1^{(t)} P_{y(t)} + d\lambda_1^{(t)} = \dot{\lambda}_t \quad \cdots\cdots (21)$$

Ⅲから導びかれる徴分方程式は次式の如くである．

$$f + P_{B_s}^{\prime(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)}$$
$$- S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t = \dot{y}_{(t)} \quad \cdots\cdots (22)$$

この両方程式を解いて動学的経路と均衡点の安定性を調べると，

第5図



となって均衡点（y_t^*, λ_1^*）は大域的安定であり，$\lambda_1^t > 0$, $y_t > 0$ のあらゆる方向への乖離も収斂して，ただちに均衡点に収斂して行くことは第5図からも明らかである．この点（y_t^*, λ_1^*）は d がゼロに近ずくにしたがって静学的均衡点に接近して行くことは(21)式の示す通りである．

次に資金の預金及び借入金の動学的経路を明らかにしよう．極大性原理から導びかれる方程式は次の2式である．

（Ⅱ）の条件から導かれる方程式は次の如くである．

$$-U_s e^{dt} - \lambda_1^{(t)} + d\lambda^{(t)} = \dot{\lambda}^{(t)} \quad \cdots\cdots (23)$$

（Ⅲ）の条件から導かれる方程式は次の如くである．

$$f + P_{B_s}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{a_s}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{B_a}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x^{(t)} - P_{a_a}^{(t)} a_a^{(t)}$$
$$- S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t = \dot{S}^{(t)} \quad \cdots\cdots (24)$$

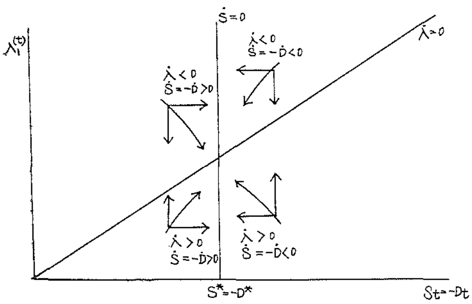
同様にして借入金の動学的経路を求める方程式は

$$U_D\, e^{dt} + \lambda_1^{(t)} - d\lambda_1^{(t)} = \dot{\lambda}^{(t)} \quad \cdots\cdots (24)'$$

$$f + P_{Bs}^{(t)} B_s^{(t)} + P_{as}^{(t)} a_s^{(t)} + D^{(t)} - P_{Ba}^{(t)} B_a^{(t)} - P_x^{(t)} x^{(t)} - P_{aa}^{(t)} a_a^{(t)}$$
$$- S^{(t)} - P_y^{(t)} y_t = \dot{D}^{(t)} \quad \cdots\cdots (24)''$$

この両方程式は次の如き図で示される.

第 6 図



すなわち預金に関しては大域的な安定条件を満たす動学的均衡点 ($S_t^* = -D_t^*$, λ_1^*) が存在し，あらゆる乖離からも収斂に導びき，割引率 d がゼロに接近するにつれて静学的均衡点に接近する．借入金はマイナスの預金であると解釈すれば同様の図でもって安定なる径路が理解出来る．以上全変数数の動学的安定性を調べたのであるが，これらの全変数について時間的変動経路が同時的に決定されなければならない．この必要条件を検討すると，次の如くである．

まず決定すべき未知数は (y_t, $a^{(t)}$, $a_s^{(t)}$, $a_a^{(t)}$, $S^{(t)}$, $D^{(t)}$, $x^{(t)}$, $B_s^{(t)}$, $B_a^{(t)}$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1^{(t)}$) の 11 コである．この内 $\lambda_0=1$ はすでに決定しているから 10 コが決定されなければならない．その方程式は (13), (14), (15), (17), (19), (21), (24), (24)′ の 8 コと次の 2 式である．

$$-\frac{\partial H}{\partial a_s^{(t)}} = \frac{\partial \lambda_1^{(t)} e^{-dt}}{dt} \quad \cdots\cdots (19)'$$

$$-\frac{\partial H}{\partial a_a^{(t)}} = \frac{\partial \lambda_1^{(t)} e^{-dt}}{dt} \quad \cdots\cdots (19)''$$

この 2 式から導びかれる微分方程式は次の如くである．

$$U_{as}^{(t)} e^{dt} + \lambda_1^{(t)} P_{as}^{(t)} + d\lambda_1^{(t)} = \dot{\lambda}_1^{(t)} \quad \cdots\cdots (19)'''$$

$$-U_{aa}^{(t)} e^{dt} - \lambda_1^{(t)} P_{aa}^{(t)} + d\lambda_1^{(t)} = \dot{\lambda}_1^{(t)} \quad \cdots\cdots (19)''''$$

したがって微分方程式の数は 10 コ，未知数も 10 コとなって，この方程式体型は一意的な解を持つ．

もちろん，この内 (14) の微分方程式は (16), (18), (20), (22), (24), (24)″ によって代替可能である．その他

$$\frac{\partial H}{\partial H_1^{(t)} e^{-dt}} = \frac{da_s^{(t)}}{dt} \quad \cdots\cdots (20)'$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1^{(t)} e^{-dt}} = \frac{da_a^{(t)}}{dt} \quad \cdots\cdots (20)''$$

の二微分方程式であっても良く，これらの内のどれか 1 コであれば良いことを意味する．すなわち 10 コの微分方程式と 10 コの未知数は一般には一意的な解に導びくが，特殊な場合にのみ解が存在しない場合や，無数の解が存在する場合となる．(注3)

ではそれらの解はいかなる動学的な経路となるであろうか．非常に簡単な例を用いて大体の解の性質を調べよう．まず生産函数に関して 2 次の仮定をおくと f_{x_t} は 1 次式となり，次式の如き方程式で代表され得るであろう．この方程式は生産函数の 1 次微分であるから正である．

$f_{x_t} > 0$

$$f_{X(t)} = 2\beta_4 (x^{(t)} - x^*) \quad \cdots\cdots (25)$$

という仮定から変動経路を調べて見よう．資本財の経路は微分方程式 III から次式が導びかれる．

$$\frac{dx_t}{dt} = \beta_4(x^{(t)} - x^*)^2 - P_x^{(t)} x^{(t)} + C \quad \cdots\cdots (26)$$

となり，この一般解は

$$x_t = A_1 e^{\alpha 1t} + B_1 e^{\beta 1t} + C_1 e^{\gamma 1t} + D_1 \quad \cdots\cdots (27)$$

A_1, B_1, C_1, D_1, α_1, β_1, γ_1 は定数である．II の条件式から導びかれる微分方程式の一般解は次式の如くである．

$$\log \lambda_1^{(t)} = -\beta_4(x^t - x^*)^2 + (P_x + d)\, x_t + C_1$$

これに(27)を代入すると λ_t の成長経路が明かとなる．以下IIIの条件から導びかれる微分方程式は全変数について変化がなく，生産要素でない場合は二次となり，一般解は

$$x_t = A_2 e^{\alpha 2t} + B_2 e^{\beta 2t} + C_2 \quad \cdots\cdots (28)$$

という型になる．$\lambda_1^{(t)}$ の成長経路は全変数について２次式となっており

$$\lambda_1^{(t)} = G(x_t)\, e^{\alpha 3t} + F(x_r)\, e^{\beta 3t} + C_3$$

という一般解を得る．

この一般解に(28)式を代入することによって $\lambda_1^{(t)}$ の成長経路が導びかれる．

次に本論文に中心的な役割をはたしている極大性原理について説明を加えておこう．

ハミルトン函数から導びかれる微分方程式10コが最適解であるための必要条件を満たさなければならない．その場合用いられた極大性原理とは次の如きである．

定理 1．最適問題に対する必要条付

仮に $W(t)$ が制御可能な変数であって，$Z(t)$，$Z(t_0) = y_0$ が $\dot{y} = f(t, y, v)$ の微分方程式に対応する解であると仮定しよう．

この $Z(t)$ が滑らかな多様体Mに収斂する必要性がある時の目的函数 $J(y, v)$ の絶対的な極大値が $[Z(t), W(t)]$ であるとすると，$\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \cdots\cdots, \lambda_n(t)\}$ なるベクターと $\lambda_0 > 0$ なる定数（１としても一般性を失しなわない）が１組存在しなければならない．しかもこの $\lambda(t)$ の各要素は次の如き性質をそなえた時間の函数である．

$$H(t, y, v, \lambda) = \lambda_0 F(t, y, v) + \sum_{j=1}^{n} \lambda j(t)\, fj(t, y, v)$$

なるハミルトン函数が存在している時，次の条件が成立する．

$$\dot{Z} = H_\lambda(t, Z, W, \lambda) = f(t, Z, W)$$

と

$$\dot{\lambda} = -H_y(t, Z, W, \lambda)$$

さらに

$$M(t, Z, \lambda) = \sup H(t, Z, V, \lambda)$$

なる M が存在する時には

$$H(t, Z, W, \lambda) = M(t, Z, \lambda)$$

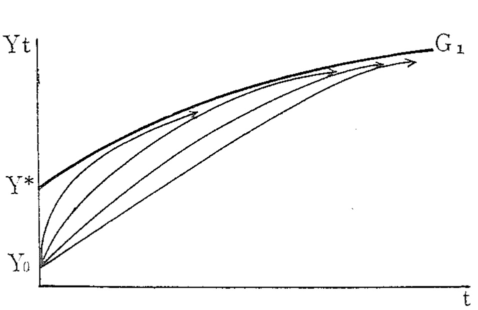
が成立しており，しかも，その H は各時間 t において，$v \in V$ である v と固定的セット (t, Z, λ) に対して極大であるような $W(t)$ を達成している．

最後に transverbality の条件として，多様体Mに属する点 $\{t_1, Z(t_1)\}$ に $Z(t)$ が収斂している時，極値を達成している $\lambda(t_1)$ は $M_1(t_1)$ に直交していなければならない．

4. 要　　約

以上によって農家の経済モデルを構成し，動学的定式化を行ない，その多数期間内最適化行動，即ち，最適投資，最適生産，最適消費がいかに決定されるかを述べた．その最適化行動によって達成された点は大域的に安定であるか不安定であるかを調べ，さらに，そのような最適化行動が存在するか否かを調べて，一般的には存在することが明らかとなった．さらにこのような動学的最適化行動はいかなる解を生むかを簡単に説明しておいた．動学的時間経路とその安定性を図でもって表わすならば次の如くである．

第7図



即ち，動学的変動経路 G_1 はⅢの組の微分方程式を導びき，成長経路を取る．しかし，これは静学的均衡点の連続としての動学的変動経路であり，この動学的変動経路は大域的安定性によって収斂することがわかる．しかし，動学的変動経路 G_1 そのものが発散的かある値に収斂的かは連立微分方程式の解の性質によるもので $t \to \infty$ の時成長経路 G_1 もまた ∞ に増大するか，ある特定値に収斂するかを調べなければならない．このような仕事はマクロ経済学の分野ではなされつつあるけれども，ミクロの分野では未だ研究された例を見ない．しかし，現実の農家は計画化として真に必要なのは静学的計画ではなくて，動態過程としての計画化，分析，実証ではなかろうか．現今の変動する経済環境にあって，この分野の理論的，実証的研究が切望される．

（注1）投資の言葉の中に前論文「The study of Investment decision」Tōzirō Habuchi 岡山大学農学部学術報告，1972年10月，第40号ではすべての経常的支出も多数期間投資も含めて取り扱っているが，経常的支出と投資を分けて取扱っているものに上記参考文献「組織と計画の経済理論」青木昌彦著，岩波書店，1970年がある．本稿においても全投資を資本財投資と土地投資だけに別けて取扱ったが，非常に多数期間生産使用可能な投資があれば土地投資に含めて取扱うのが良い．経常的支出と資本財投資を別けて取扱う場合には生産函数に関する仮定がさらに必要である．

（注2）異時点均衡について本稿では述べていないが，(11) 式から $\lambda_i^{(t)}$ を消去して行くことによって，同時点均衡条件及び異時点均衡条件が導びかれる．

（注3）大域的定安性が証明されている段階は動学的均衡点の経路の存在は証明されていないが，均衡経路が存在すると仮定して，大域的安定性を証明し，しかる後に動学的均衡解が存在すれば安定であり，次いで一般的には方程式の数と未知数の数，正確には方程式の rank（階数）と未知数の数が等しいことをもって均衡解が存在することを述べた．証明の方法はこの方法が便利である．

なお岡山大学農学部農業経営学研究室勤務，平井広子嬢には日頃本稿及びその他論文作成のため御世話になった．本紙面を借りてお礼申し上げる．

参　考　文　献

1. 田中修著(1967)：農業の均衡分析，有斐閣
2. 青木昌彦著(1970)：組織と計画の経済理論；岩波書店，161～185
3. James. M. Henderson and Richard. E. Quandt (1958)：Microecenomic Theory, A Mathematical approach, International Student Edition. 225～255
4. G. Hadley and M. C. Kemp (1971)：Variational Methods in Economics ; North-Holland Publishing Company.
5. 頼平著(1971)：農家経済経営論．明文書房，184～204
6. Tōzirō Habuchi (1972)：The Study of Investment decision ; 岡山大学農学部学術報告，第40号，19～24